APOTEMA : Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika, Volume 10, No. 1. Januari 2024
ISSN: 2407-8840 (*print*)
ISSN: 2580-9253 (*online*)

SOLUSI PERSAMAAN DIOPHANTINE BENTUK KUADRAT $f(x, y) = 0$

Moh. Affaf[1]

[1] Program Studi Pendidikan Matematika, STKIP PGRI Bangkalan
mohaffaf@stkippgri-bkl.ac.id

Abstrak: Salah satu materi yang dilombakan kompetisi nasional tingkat SMA/Sederajat, baik di ajang kompetensi sains nasional (KSN) maupun kompetisi sains madrasah (KSM) adalah Teori Bilangan. Padahal, materi ini tidak masuk pada kurikulum untuk tingkat tersebut. Salah satu permaslaahan yang sering muncul untuk topik Teori Bilangan adalah Persamaan Diophantine. Dalam artikel ini akan dibahas bagaimana menemukan solusi Persamaan Diophantine yang memiliki dua variabel dan dapat dipandanmg sebagai persamaan kuadrat. Caranya adalah dengan menuliskan Persamaan Diophantine yang diberikan ke dalam bentuk umum persamaan kuadrat. Selanjutkan, kondisikan diskriminan persamaan kuadrat yang diperoleh dengan menuliskannya sebagai kuadrat sempurna, atau kondisikan nilainya sebagai bilangan bulat nonnegatif.

Kata-kata kunci: KSN, KSM, OSN, Persamaan Diophantine, Persamaan Kuadrat, Teori Bilangan.

PENDAHULUAN

Olimpiade Sains Nasional (OSN) dan Kompetisi Sains Madrasah (KSM) adalah ajang kompetisi matematika tingkat sekolah skala nasional. Bedanya, OSN diadakan Kemdikbud sedangkan KSM dilaksanakan Kemenag. OSN sempat berganti nama pada masa covid-19 menjadi KSN yang merupakan singkatan dari kompetisi sains nasional. Kemudian, namanya berubah kembali menjadi OSN pada tahun 2023. Salah satu bidang yang dikompetisikan dalam ajang OSN maupun KSM adalah bidang Matematika. Bidang ini dilombakan dari tingkat SD/MI, SMP/MTs, sampai tingkat SMA/MA. Secara garis besar, materi-materi yang perlu dipelajari untuk dapat berkompetisi dalam bidang ini sama, yaitu Operasi Hitung Aljabar, Geometri, Pencacahan atau Kombinatorika, dan Bilangan atau Teori Bilangan, tetapi porsinya saja yang tidak sama untuk setiap jenjang. Untuk materi-materi ini, setiap jenjang memiliki kesulitan-kesulitan tersendiri baik itu karena terlalu dalamnya ilmu yang diujikan pada materi tersebut atau pun karena memang belum pernah mendapatkan materi tersebut sebelumnya.

Salah satu materi yang diujikan dalam OSN maupun KSM bidang Matematika adalah Teori Bilangan. Padahal, materi ini baru diberikan pada tingkat perguruan tinggi. Bahkan, materi ini selalu diujikan dalam OSN maupun KSM sejak awal penyelenggarannya hingga saat ini.

Teori Bilangan merupakan salah satu cabang dari matematika yang membahas

ISSN: 2407-8840 (*print*)
ISSN: 2580-9253 (*online*)

tentang bilangan bulat dan sifat-sifatnya. Seperti halnya cabang matematika yang lain, Teori Bilangan juga banyak pengaplikasiannya dalam kehidupan sehari-hari, baik dalam keefisienan berlalu-lintas **[1]**, perhitungan kalender tradisional **[2]**, bahkan dalam matematika itu sendiri **[3-4]**. Di bangku kuliah, Teori Bilangan sendiri masih menjadi salah satu mata kuliah yang terbilang sulit pada program studi S-1 Matematika **[5]**.

Topik atau masalah Teori Bilangan yang muncul dalam soal KSN meliputi Keterbagian, Bilangan Prima, FPB, Persamaan Diophantine, Sisa Pembagian, dan Kongruensi **[6]**. Untuk masing-masing topik, pemecahan masalahnya pun terbilang variatif. Untuk topik Masalah Sisa Pembagian, topik ini muncul berkenaan dengan adanya gagasan dari Algoritma Pembagian. Algoritma ini menyatakan bahwa untuk sebarang dua bilangan bulat a dan b, selalu dapat ditemukan bilangan secara tunggal bilangan bulat q dan r sehingga diperoleh $b = aq + r$ dengan $0 \leq r < |a|$. Dari sini, kita sebut r sebagai sisa pembagian b ketika dibagi oleh a.

Sekilas, permasalahan sisa ini terlihat begitu mudah. Namun hal ini akan berbeda jika saat b berbentuk m^k, untuk suatu bilangan asli , untuk suatu bilangan asli m dan k. Permasalahan lain muncul saat k cukup besar sehingga tidak memungkinkan untuk menghitung nilai eksak dari m^k. Namun, **[7-8]** memberikan teknik penyelesaian untuk permasalahan ini.

Untuk topik Persamaan Diophantine, masalahnya biasanya memiliki solusi yang cukup variatif. Hal ini ditunjukkan dengan adanya beberapa paper yang membahas tentang solusi dari suatu Persamaan Diophantine untuk bentuk tertentu, tidak secara menyeluruh **[9-11]**. Oleh karenanya, disini penulis ingin memberikan prosedur penyelesaian Persamaan Diophantine untuk kasus dua avriabel dan dapat dipandang sebagai persamaan kuadrat. Namun sebelum itu, diperlukan beberapa kajian atau bahan untuk mendapatkan prosedurnya.

KAJIAN TEORI

Disini akan dijelaskan beberapa teori yang anntinya akan mendasari teknik penelesaian masalah sisa pembagian yang kita bahas dalam bagian Hasil dan Pembahasan. Semua definisi dan teorema pada kajian terori ini diambil dalam buku **[12]**.

2.1. Keterbagian

Sebelum membahas tentang definisi keterbagian bilangan bulat, penting untuk mengetahui bahwa himpunan semua

ISSN: 2407-8840 (*print*)
ISSN: 2580-9253 (*online*)

bilangan bulat yang dinotasikan dengan $\mathbb{Z}$, yaitu $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Pada himpunan ini berlaku sifat assosiatif, komutatif dan distributif terhadap operasi penjumlahan dan perkalian biasa.

Definisi 2.1.1. (keterbagian) Diberikan $a, n \in \mathbb{Z}$. Bilangan bulat a dikatakan membagi (*divides*) n jika dan hanya jika terdapat $b \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga $n = ab$. Jika a membagi n, maka a disebut pembagi atau faktor (*divisior*) n, dan n disebut kelipatan (*multiple*) a. Bilangan bulat a yang membagi n ditulis $a|n$. Jika a tidak membagi n, ditulis $a \nmid n$.

Sebagai contoh, 4 membagi 52 karena terdapat bilangan bulat 13 sehingga 52 dapat dituliskan sebagai 4×13. Namun, 4 tidak membagi 25 karena untuk sebarang bilangan bulat t, 25 tidak akan pernah bisa dituliskan $4 \times t$. Berkenaan dengan adanya bilangan bulat ang tidak membagi bilangan bulat yang lain, maka muncullah konsep sisa pembagian yang dituangkan dalam Teorema 2.1.2. berikut.

Teorema 2.1.2. (Algoritma Pembagian) Untuk sebagai bilangan bulat a dan b dengan $a \neq 0$, terdapat bilangan bulat q dan r sehingga $b = aq + r$ dengan $0 \leq r < |a|$. Berkenaan dengan Algoritma Pembagian di atas, kita sebut r sebagai Sisa Pembagian Pembagian b oleh a. Sebagai contoh, 2 adalah sisa pembagian 22 oleh 4 karena 22 dapat dituliskan sebagai $4 \times 5 + 2$, dimana 2 memenuhi $0 \leq 2 < 4$. Namun, 5 bukan sisa pembagian 21 oleh 4 karena meskipun 21 dapat dinyatakan sebagai $4 \times 4 + 5$ tetapi 5 tidak memenuhi $5 < 4$.

2.2. Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Satu lagi konsep penting dalam teori bilangan adalah faktor Persekutuan Terbesar (FPB). Definisi FPB dua bilangan bulat diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.2. (FPB) Diberikan bilangan bulat a dan b yang keduanya tak nol. Dikatakan d sebagai faktor persekutuan terbesar dari a dan b dalam kasus d adalah bilangan bulat terbesar dengan sifat $d|a$ dan $d|b$ dan dituliskan $d = (a, b)$. Jika a dan b keduanya 0, maka didefinisikan $(a, b) = 0$.

Faktor persekutuan terbesar dari 20 dan 24 adalah 4 karena 4 adalah faktor bersama dari 20 dan 24 serta 4 merupakan bilanagn terbesar daripada faktor bersama yang lain dari 20 dan 24.

Teorem berikut memberikan prosedur bagaimana menemukan FPB dari dua bilangan bulat dengan cara memanfaatkan sisa pembagiannya.

Teorema 2.2.3. Diberikan bilangan bulat positif a dan b dengan $b > a$. Jika $b = aq + r$ dengan $a > r \geq 0$, maka $(b, a) = (a, r)$.

Misalkan akan dicari FPB dari 123 dan 45. Dengan menerapkan algoritma pembagian , diperoleh :

123 = 45.2 + 33

45 = 33.1 + 12

33 = 12.2 + 9

12 = 9.1 + 3

9 = 3.3 + 0

Dengan demikian, diperoleh (123,45) = (45,33) = (33,12) = (12,9) = (9,3) = (3,0) =3. Artinya, FPB dari 123 dan 45 adalah 3.

2.3. Persamaan Diophantine

Salah satu topik penting dalam studi Teori Bilangan adalah Persamaan Diophantine. Persamaan ini dapat memuat lebih dari dua variabel. Untuk bentuk linear,Persamaan Diopahntine dudefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.1. (Persamaan Diophantine) Diberikan bilangan bulat a, b dan c. Persamaan dua variabel

$$ax + by = c$$

disebut Persamaan Diophantine jika dan hanya jika terdapat pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan tersebut.

Sebagai contoh, persamaan $3x + 5y = 15$ merupakan Persamaan Diophantine karena terdapat bilangan bulat 3 dan 0 sedemikian hingga $15 = 3(5) + 5(0)$. Dilain pihak, persamaan $20x + 24y = 26$ bukan Persamaan Diopahntine karena tidak dapat ditemukan bilangan bulat x dan y yang memenuhi $20x + 24y = 26$.

Teorema berikut memberikan karakterisasi kapan suatu persamaan berbentuk $ax + by = c$ merupakan Persamaan Diophantine atau bukan.

Teorema 2.3.2. (syarat perlu dan syarat cukup) Diberikan bilangan bulat a, b dan c. Persamaan dua variabel

$$ax + by = c$$

Merupakan Persamaan Diophantine jika dan hanya jika

$$(a, b)|c$$

dengan (a, b) menyatakan FPB dari a dan b.

Sebagai contoh, persamaan $20x + 24y = 26$ bukan Persamaan Diopahntine karena FPB dari 20 dan 24 adalah 4 sedangkan 4 tidak membagi 26. Dilain pihak, persamaan $3x + 5y = 15$ merupakan Persamaan Diophantine karena FPB dari 3 dan 5 adalah 1 serta 1 membagi 15.

Terakhir, kajian teori ini akan ditutup dengan konsep Persamaan Kuadrat. Adapaun definisinya diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.3. (Persamaan Kuadrat) Diberikan bilangan bulat a, b dan c dengan $a \neq 0$. Persamaan berbentuk

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Disebut persamaan kuadrat dalam variabel x.

Selanjutnya, bilangan α yang memenuhi persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ disebut akar atau solusi dari persamaan kuadrat tersebut.

Definisi 2.3.4. (Akar Persamaan Kuadrat) Diberikan bilangan bulat a, b dan c dengan $a \neq 0$. Jika x_1 dan x_2 adalah akar dari persamaan kuadrat

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dengan $x_1 \geq x_2$, maka

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

dan

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

dengan $D = b^2 - 4ac$ yang disebut diskriminan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Persamaan Diophantine Bentuk Kuadrat $f(x, y) = 0$

Pembahasan ini akan diawali dengan definisi dari persamaan diophantine yang akan diselesaikan dalam penelitian ini.

Definisi 3.1.1. Persamaan Diophantine dua variabel

$$f(x, y) = 0$$

disebut Persaman Diophantine bentuk kuadrat jika dan hanya jika pangkat tertinggi variabelnya adalah dua dan persamaan tersebut memiliki solusi bilangan bulat.

Persamaan $x^2 - xy + y^2 = 2x + 2y$ merupakan Persamaan Diophantine bentuk kuadrat karena variabel x dan y berpangkat dua dan persamaan tersebut memiliki solusi bulat, yaitu $x = 0$ dan $y = 0$.

3.2. Solusi Persamaan Diophantine Bentuk Kuadrat $f(x, y) = 0$

Untuk dapat menemukan solusi Persamaan Diophantine bentuk kuadrat $f(x, y) = 0$, kita memerlukan teorema berikut.

Teorema 3.2.1. Jika Persamaan Diophantine bentuk kuadrat $f(x, y) = 0$ dapat dipandang persamaan kuadrat, maka $D = d^2$ untuk suatu bilangan asli d.

Bukti. Misalkan Persamaan Diophantine $f(x, y) = 0$ dapat dipandang sebagai persamaan kuadrat dalam x (untuk dalam y serupa), maka persamaan ini persamaan ini memiliki solusi bulat x dan y. Misalkan $x = \alpha$ adalah solusinya, maka α memenuhi $\alpha = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ atau $\alpha = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$. Karena α adalah bilangan bulat, maka haruslah D merupakan kuadrat sempurna.

Sebagai contoh, misalkan kita diminta mencari semua bilangan bulat x yang

ISSN: 2407-8840 (print)
ISSN: 2580-9253 (online)

menyebabkan bilangan berbentuk $\sqrt{x^2-19x+99}$ merupakan bilangan asli. Disini, permasalahan kita belum mengena pada persamaan diophantine. Namun, jika dimisalkan bilangan asli yang diperoleh nanti adalah y, maka kita mendapatkan Persamaan Diophantine

$$\sqrt{x^2-19x+99}=y$$

Persamaan Diophantine ini sudah berbentuk kuadrat, namun belum dapat dipandang sebagai persamaan kuadrat. Tetapi, jika kita menguadratkan kedua ruas dan membuat ruas kanan menjadi 0, maka diperoleh

$$x^2-19x+99-y^2=0$$

Pada persaman terakhir ini, kita sudah dapat memandang Persamaan Diophantine ini sebagai persaman kuadrat dengan $a=1$, $b=-19$, dan $c=99-y^2$.

Selanjutnya, akan diberikan prosedur bagaimana menemukan solusi dari Persaman Diopahntine yang dapat dipandang sebagai persamaan kuadrat.

Prosedur 3.2.2. Jika Persamaan Diophantine bentuk kuadrat $f(x,y)=0$ dapat dipandang persamaan kuadrat, maka solusi dapat ditemukan jika diskriminannya dapat dituliskan sebagai $z^2 \pm k$ untuk suatu bilangan bulat z dan k.

Sebagai contoh, pada persaman diophantine sebelumnya, yaitu

$$x^2-19x+99-y^2=0$$

Dapat dilihat bahwa $D=(-19)^2-4(1)(99-y^2)$, yaitu

$$D=(2y)^2-35$$

Selanjutnya, karena D juga merupakan kuadrat sempurna, katakan $D=d^2$ untuk suatu bilangan asli d, maka

$$(2y)^2-35=d^2$$

yaitu

$$(2y)^2-d^2=35$$

yang artinya

$$(2y+d)(2y-d)=35$$

Karena y dan d bilangan asli, maka $2y+d$ dan $2y-d$ merupakan faktor dari 35, yaitu kita dapatkan

$$2y+d=35 \text{ dan } 2y-d=1$$

atau

$$2y+d=7 \text{ dan } 2y-d=5$$

Dari sistem pertaman diperoleh $d=17$ sedangkan dari sistem kedua diperoleh $d=1$. Untuk $d=17$, diperoleh

$$x=\frac{19\pm 17}{2}$$

yaitu $x=18$ atau $x=1$. Untuk $d=1$, diperoleh

$$x=\frac{19\pm 1}{2}$$

yaitu $x=10$ atau $x=9$. Jadi, bentuk

$$\sqrt{x^2-19x+99}$$

merupakan bilangan asli untuk $x \in \{1,9,10,18\}$.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa Persamaan Diophantine dua variabel yang dapat dipandang sebagai persamaan kuadrat dapat diselesaikan dengan memandang diskriminannya dalam bentuk $z^2 \pm k$ untuk suatu bilangan bulat z dan k.

SARAN

Solusi Persamaan Diophantine pada penelitian ini masih berfokus pada persamaan dua variabel yang meminta solusi bulat dengan kedua variabelnya berpangkat tertinggi dua. Penelitian berikutnya dapat difokuskan bagaimana menemukan solusi Persamaan Diophantine untuk lebih dari dua variabel atau pangkat tertingginya lebih besar daripada dua.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Wardani, R. D., & Kurniawan, M. S. (2019). Penerapan Teori Bilangan untuk Menentukan Kongruensi pada Lampu Lalu Lintas. *Barekeng: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, *13*(1), 047-052.

[2] Nuraeni, Z. (2019). Penerapan teori bilangan dalam perhitungan kalender tradisional. *JUMLAHKU: Jurnal Matematika Ilmiah STKIP Muhammadiyah Kuningan*, *5*(1), 24-30.

[3] Affaf, M., & Ulum, Z. (2018). Desimal Berulang Untuk Suatu Numerator. *APOTEMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, *4*(2), 19-26.

[4] Affaf, M., & Ulum, Z. (2020). Beberapa Sifat Midy Pada Desimal Berulang Untuk Suatu Pembilang. *APOTEMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, *6*(1), 12-19.

[5] Setiawan, E., Muhammad, G. M., & Soeleman, M. (2021). Analisis Kemampuan Pemecahan Masalah Mahasiswa pada Mata Kuliah Teori Bilangan. *Mosharafa: Jurnal Pendidikan Matematika*, *10*(1), 61-72.

[6] Supriano. (2016). *Silabus Olimpiade Sains Nasional Tahun 2106*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

[7] Affaf, M., & Desriyati, W. (2022). Teknik Penyelesaian Masalah Sisa Pembagian Dengan Kongruensi Dan Teorema Euler. *Apotema: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, *8*(1), 57-63.

[8] Affaf, M., & Hermanto, D. (2023). Teknik Penyelesaian Masalah Sisa Pembagian Bentuk Perpangkatan Dengan Teorema Euler Dan CRT. *Apotema: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, *9*(1), 84-90.

[9] Bugeaud, Y. (2004). On the Diophantine equation (xk− 1)(yk− 1)=(zk− 1). *Indagationes Mathematicae*, *15*(1), 21-28.

[10] Ulas, M. (2012). Some observations on the Diophantine equation y2= x!+ A and related results. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, *86*(3), 377-388.

[11] Zhang, Y. (2016). Some observations on the Diophantine equation f (x) f (y)= f (z) 2. In *Colloquium Mathematicum* (Vol. 2, No. 142, pp. 275-283).

[12] Rosen, K. H. (2011). *Elementary number theory*. London: Pearson Education.